

# Die Geburt der Mathematik aus den Bedingungen der Musik

REINHARD WINKLER  
(TU WIEN)

Die Tradition, Mathematik und Musik in Zusammenhang zu bringen, ist über 2500 Jahre alt und vor allem mit dem Namen Pythagoras verbunden. Historisch gesichert ist nur wenig, und der Beigeschmack von zahlenmystisch durchtränkter Esoterik lässt sich schwer leugnen. Heutzutage, geprägt von einem naturwissenschaftlichen Weltbild, besitzen wir ein wesentlich klareres Verständnis für viele mathematische Hintergründe der Musik. Einige grundlegende sollen im vorliegenden Artikel angesprochen werden. Um das Potential von Musik als Motivation für den Mathematikunterricht zu erschließen, wird dabei der Vielfalt mathematischer Anknüpfungspunkte der Vorrang gegeben gegenüber einer mathematisch vollständigen oder gar rigorosen Darstellung.<sup>1</sup>

## 1. Einleitung

Kaum ein kulturelles Phänomen bewegt Menschen so ganzheitlich wie die Musik, und kaum eine Verbindung zwischen Kunst und Wissenschaft hat so viele Geister beschäftigt wie diejenige zwischen Musik und Mathematik – seit den Zeiten des Pythagoras vor über 2500 Jahren. Gleichzeitig ist nach wie vor die Mathematik für viele Schülerinnen und Schüler das Angstfach schlechthin. Es liegt also nahe, die emotionale Macht der Musik im Unterricht einzusetzen, um die Mathematik auch bei jenen mit positiven Emotionen in Verbindung zu bringen, die damit bisher Probleme hatten.

Im vorliegenden Artikel möchte ich mathematische Hintergründe der Musik beleuchten, die schon auf relativ elementarem Niveau und mit geringem formalen Aufwand wenigstens qualitativ verstehbar sind. Ich beschränke mich dabei auf weitgehend objektive Fakten, die die Bedingungen für die Übersetzung des physikalischen Phänomens Schall in unsere subjektive Wahrnehmung von Musik bestimmen.

Im Detail heißt das: Wir werden die Entstehung des Tones einer schwingenden Saite (Kapitel 2) mit psychoakustischen Grundtatsachen (Kapitel 3) in Verbindung bringen und dabei auf die Obertöne (Kapitel 4) stoßen. Von diesem physikalischen Phänomen ausgehend werden wir uns darauf wieder Musik und Mathematik selbst zuwenden (Kapitel 5) und mit Schlussbemerkungen samt allgemeinen Literaturhinweisen zum Thema schließen (Kapitel 6).

Die auf diesem Weg anklingenden mathematischen Themen sind mannigfaltig: Vektoren und Kräfteparallelogramme; die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion, insbesondere zur Basis 2; Rechnen modulo 1 (kontinuierlich) und modulo 12 (diskret); Differentialgleichungen und ihre Herleitung aus mechanischen Überlegungen; Fourierreihen und harmonische Analysis; Zahlentheorie mit eindeutiger Primfaktorzerlegung und Diophantischer Approximation; Bemerkungen zur Symmetrie.

## 2. Die Entstehung des Tones

### 2.1. Geräusch – Ton

Was unser Gehör wahrnimmt, sind bekanntlich rasche Fluktuationen des Luftdrucks. Allgemein spricht man von Geräusch. Erfolgen die Fluktuationen regelmäßig, entsteht das, was man einen Ton nennt. Die Amplitude der Luftdruckschwankungen korrespondiert mit der Lautstärke, die Frequenz (gemessen in Hertz = eine Schwingung pro Sekunde) mit der Tonhöhe, der unser besonderes Augenmerk gilt. Dass physikalische Phänomene und Sinneswahrnehmung just in dieser Weise zusammenhängen, muss unseren prähistorischen Vorfahren evolutionäre Vorteile gebracht haben, und es ist höchst interessant, darüber nachzudenken. Nahe liegt die Vermutung, dass unsere Fähigkeit, Tonhöhen zu unterscheiden, nur dann Vorteile bringen konnte, wenn Töne in der physikalischen Wirklichkeit häufig auftreten. A priori ist das

<sup>1</sup> Ich danke Elmo Cosentini, Christian Krattenthaler und Franz Pauer für wertvolle Diskussionen und Verbesserungsvorschläge zu diesem Artikel.

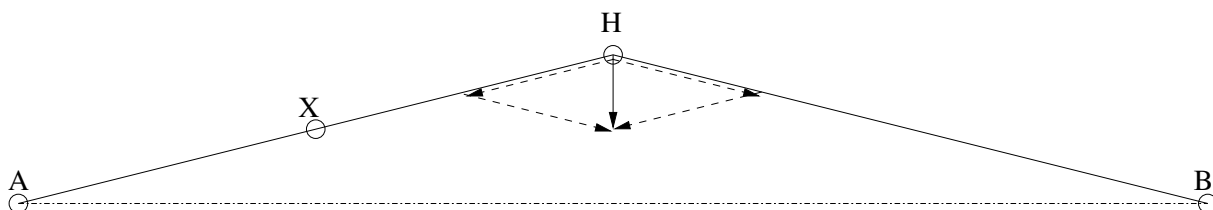
einigermaßen überraschend, denn keineswegs alle regelmäßigen Gebilde der Mathematik sind auch in der Natur ubiquitär. Im Kontrast dazu erzeugen Stimmbänder wie von selbst Töne mit einer bestimmten Tonhöhe, schon beim Neugeborenen. Und das hat physikalische Gründe, die sich mathematisch fassen lassen.

Die wichtigsten Beispiele, an denen sich das erläutern lässt, sind schwingende Saiten (Streich-, Zupf- und viele Tasteninstrumente wie das Klavier aber auch menschliche Stimmbänder) und Luftsäulen (Blasinstrumente, Orgel). Abgesehen von der Gruppe der Schlaginstrumente lässt sich also der Großteil der gängigen Instrumente einem dieser beiden Modelle zuordnen. Für die Behandlung im Mathematikunterricht erscheint die schwingende Saite etwas besser geeignet, weshalb wir uns im Folgenden auf sie konzentrieren.

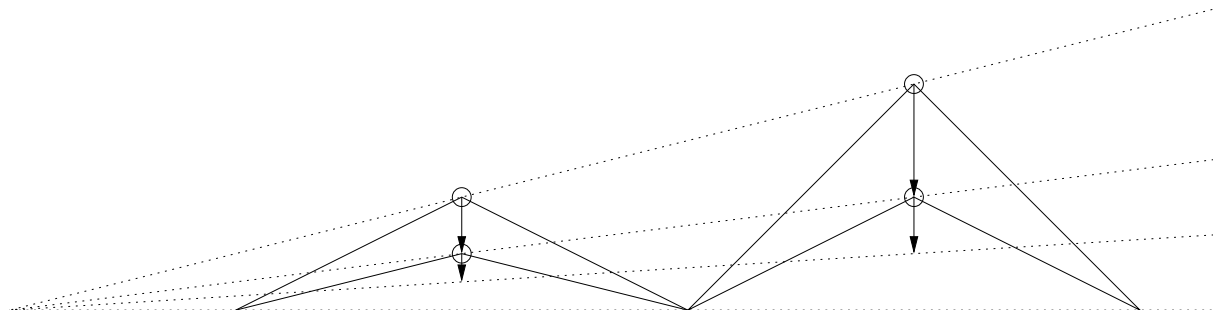
## 2.2. Was bewegt die schwingende Saite?

Dass eine schwingende Saite ihre Schwingungen auf die Luft überträgt, noch dazu, wenn sie auf einem Resonanzkörper aufliegt, ist ja höchst plausibel. Aber warum erzeugt sie einen Ton mit konstanter Frequenz, unabhängig von der Lautstärke? Man könnte ja erwarten, dass, weil der lautere Ton eine größere Auslenkung der Saite erfordert, eine Schwingung mehr Zeit in Anspruch nähme als bei einem leiseren Ton. Dann müsste der Ton beim Anzupfen tiefer sein und während des Leiserwerdens steigen. Doch beobachten wir nichts dergleichen, eher das Gegenteil.

Auskunft gibt ein Blick auf die Kräfte, die wirken, wenn eine an den Punkten A und B fixierte Saite aus ihrer Ruhelage (strichpunktiert) an ihrem Halbierungspunkt H angehoben und aus dieser Position (durchgehende Linie) zum Schwingen freigegeben wird:



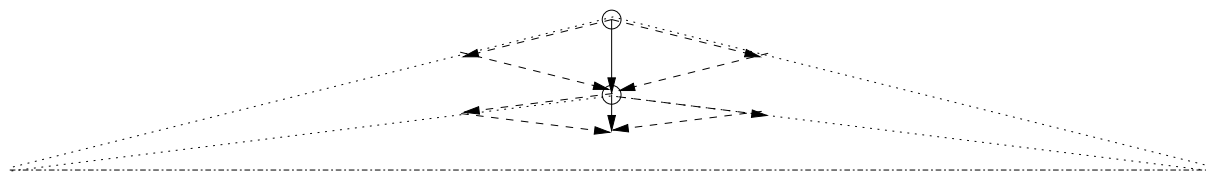
An allen Punkten  $X \neq H$  wirken aufgrund der Spannung zwei gleich große Kräfte in entgegengesetzte Richtung, heben einander also auf und bewirken somit gar nichts. In dieser Position tatsächlich beschleunigt wird nur H, und zwar senkrecht nach unten (durchgehender Pfeil als resultierende Rückstellkraft im strichlierten Kräfteparallelogramm), wobei gilt:  $c$ -fache Auslenkung entspricht einer  $c$ -fachen Kraft, diese einer  $c$ -fachen Beschleunigung, diese einer  $c$ -fachen Geschwindigkeit. Weil die Schwingung auch den  $c$ -fachen Weg zurücklegt, bleibt die Frequenz gleich. Anders ausgedrückt: Indem die Saite stärker ausgelenkt wird, erhöht sich jene Kraft, welche die Schwingung bewirkt, gerade so, dass die Schwingung in derselben Zeit den entsprechend längeren Weg zurücklegt und daher die Frequenz konstant bleibt:



Bei genauerer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass wir mancherlei vernachlässigt haben.

### 2.3. Achtung, vereinfachende Modellannahmen

Vergleicht man in



die beiden Parallelogramme sorgfältig (sorgfältiger als in der Graphik wiedergegeben), so fällt auf, dass sich die vertikalen Kraftkomponenten in Wahrheit aus wenigstens zwei Gründen nicht exakt mit demselben Faktor  $c$  wie die Auslenkung der Saite verändern.

Erstens wegen der geometrischen Verzerrung, welche die Kraft verkleinert, zweitens wegen des Hookeschen Gesetzes, welches eine Vergrößerung zur Folge hat. Zur Erinnerung: Nach dem Hookeschen Gesetz ist die für eine elastische Dehnung (wie bei Federn oder typischen Saiten) aufzuwendende Kraft proportional zur Auslenkung. Eine genauere Analyse dieser beiden Effekte zeigt erstens, dass der zweite Effekt des Hookeschen Gesetzes dominiert, und zweitens, dass beide (unerwünschten) Effekte verringert werden können, indem man die Grundspannung der Saite erhöht.

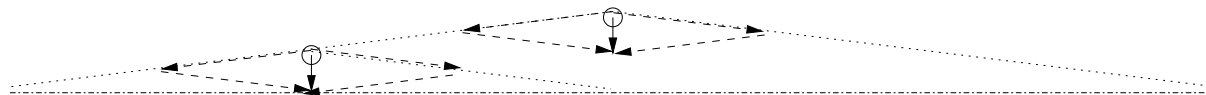
Zunächst zur geometrischen Verzerrung. Ist  $l$  die Länge der Saite in Ruhelage und  $l'$  bei maximaler Auslenkung  $a$ , so gilt nach Pythagoras  $l' = 2\sqrt{\frac{l^2}{4} + a^2}$ . Für eine Gitarre ist die Annahme  $l = 0,7$  (in Meter) und  $a = 0,01$  halbwegs realistisch, also gerundet  $l' \approx 0,7003$ . Das ist eine Streckung um  $\frac{l'-l}{l} \approx 0,0004$ , also um etwa 0,4 Promille. Wir werden bald sehen, dass es erstens genau um diese relative Veränderung geht und zweitens, dass diese Veränderung zu gering ist, um vom Gehör wahrgenommen zu werden.

Beim Hookeschen Gesetz hingegen kommt es darauf an, welche Dehnung der Saite bereits vorangegangen war, indem sie vom ungespannten auf den gespannten Zustand in Ruhelage um  $d$  gedehnt wurde. Dann geht es nicht um das Verhältnis  $\frac{l'-l}{l}$ , sondern um das Verhältnis  $\frac{l'-l}{d}$ . Nehmen wir beispielsweise eine Vordehnung  $d = \frac{l}{100}$  an, so ergibt sich entsprechend eine Vergrößerung der Spannkraft um etwa 4%. Das liegt bereits eindeutig im hörbaren Bereich (etwa zwei Drittel eines Halbtones). Damit ist ein Phänomen erklärt, das z.B. auf der Gitarre nachvollzogen werden kann: Zupft man eine Saite sehr stark an, so ist der Ton zu Beginn höher, nähert sich aber schnell dem korrekten Niveau.

Dieser Effekt kann in doppelter Weise durch möglichst hohe Grundspannung der Saite verringert werden: erstens wegen der dann geringeren erforderlichen Auslenkung  $a$  und zweitens weil dadurch  $d$  größer wird. Das beste Beispiel dazu ist das Klavier, wo die Spannkraft einer einzigen Saite dem Gewicht von etwa 100 kg entspricht, was den Stahlrahmen eines Klaviers insgesamt in der Größenordnung von 20 Tonnen belastet. Eine gewöhnliche Gitarre würde so einer Spannung nicht einmal bei nur einer Saite standhalten. Für die meisten Saiten im Klavier ist  $a$  mit dem freien Auge nicht einmal sichtbar. Lediglich sehr lange Saiten mit  $l \approx 2$  zeigen im Forte eine sichtbare Auslenkung  $a \approx 0,001$  von höchstens einem Millimeter. Rechnen wir wieder mit  $d = \frac{l}{100}$ , so ergibt sich daraus eine Verzerrung des Tones von nur etwa 0,05 Promille, weit unter der Hörbarkeit. Deshalb sind die Töne des Klaviers viel stabiler als die der Gitarre.

### 2.4. Kurze und lange Saite im Vergleich

Wir betrachten zwei gleichartige Saiten (punktirt), von denen jedoch die eine nur halb so lang wie die andere ist.



Vermittels Überlegungen wie zuvor schließen wir: halbe Länge der Saite entspricht bei gleichbleibender

Rückstellkraft doppelter Frequenz. Klarerweise gilt Analoges auch für andere Proportionen, also:

$$\text{Frequenz} = \frac{K}{\text{Saitenlänge}}$$

mit einer Konstanten  $K$ , die von der Wahl der Einheiten sowie von Beschaffenheit und Spannung der Saite abhängt, nicht aber von ihrer Länge.

### 3. Psychoakustische Grundtatsachen

#### 3.1. Objektivierung von Subjektivem

Bisher haben wir rein physikalische Größen, vor allem Frequenz und Länge, zueinander in Beziehung gesetzt. Dass Menschen Musik lieben, liegt aber an den psychischen Vorgängen, die Musik auslöst. Und da interessiert uns vor allem der Zusammenhang zwischen der objektiv messbaren Frequenz mit der zunächst nur als subjektive Kategorie fassbaren Tonhöhe. Bemerkenswerter Weise gibt es aber einfache Experimente, deren Ergebnisse, obwohl zunächst nur subjektiv feststellbar, trotzdem sehr präzise, quantifizierbare und mathematisch fassbare Zusammenhänge enthüllen.

#### 3.2. Transposition und das Weber-Fechnersche Gesetz

Wir führen (tatsächlich oder auch nur in Gedanken) auf der Gitarre das folgende Experiment durch. Wir verwenden nur eine der sechs Saiten und greifen eine bestimmte Abfolge von Bündeln, z.B. ganz einfach: 7-7-4-4-4-4-0 (*am Brunn-en vor dem To-re*). Spielen wir dieselbe Abfolge mit einer anderen Saite, so verändert sich zwar die Tonhöhe, wir empfinden die Melodie aber als dieselbe, gleichsam nur verschoben. Musikalisch gesprochen: Auf der e'-Saite erklingt die Melodie in e-Dur (hier die Originaltonart), auf der h-Saite in h-Dur etc., also immer dieselbe Melodie, lediglich in transponierter Lage.

Auf der e'-Saite:

Am Brunn-en vor dem To-re

Auf der h-Saite:

Am Brunn-en vor dem To-re

Auf der g-Saite:

Am Brunn-en vor dem To-re

Auf der d-Saite:

Am Brunn-en vor dem To-re

Auf der A-Saite:

Am Brunn-en vor dem To-re

Auf der E-Saite:



Wir modellieren mathematisch mit einer Funktion  $t$ , welche jeder Frequenz  $x$  eine Tonhöhe  $t(x)$  zuordnet, wobei wir ein  $x_0$  und ein zugehöriges  $t_0$  als Eichpunkte fixieren, also  $t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t(x_0) = t_0$ . Die Abstände der Bündel sind für jede Saite gleich, definieren daher dieselben Proportionen der Saitenlängen und somit, wegen der indirekten Proportionalität (siehe 2.4), die umgekehrten Proportionen der Frequenzen. Dem Übergang zu einer anderen Saite entspricht für die Frequenzen daher ein bestimmter multiplikativer Faktor  $q > 0$ , für die Wahrnehmung der Tonhöhe ein nur von  $q$  abhängiger Summand  $f(q)$ . Als Formel:  $t(x_0q) = t_0 + f(q)$  mit einer monoton wachsenden und von  $x_0$  unabhängigen Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Einerseits gilt dabei  $t(x_0q_1q_2) = t_0 + f(q_1q_2)$ , andererseits  $t(x_0q_1q_2) = t(x_0q_1) + f(q_2) = t_0 + f(q_1) + f(q_2)$ , folglich

$$f(q_1q_2) = f(q_1) + f(q_2),$$

die Funktionalgleichung des Logarithmus. Also gibt es eine Basis  $b$  mit

$$f = \log_b$$

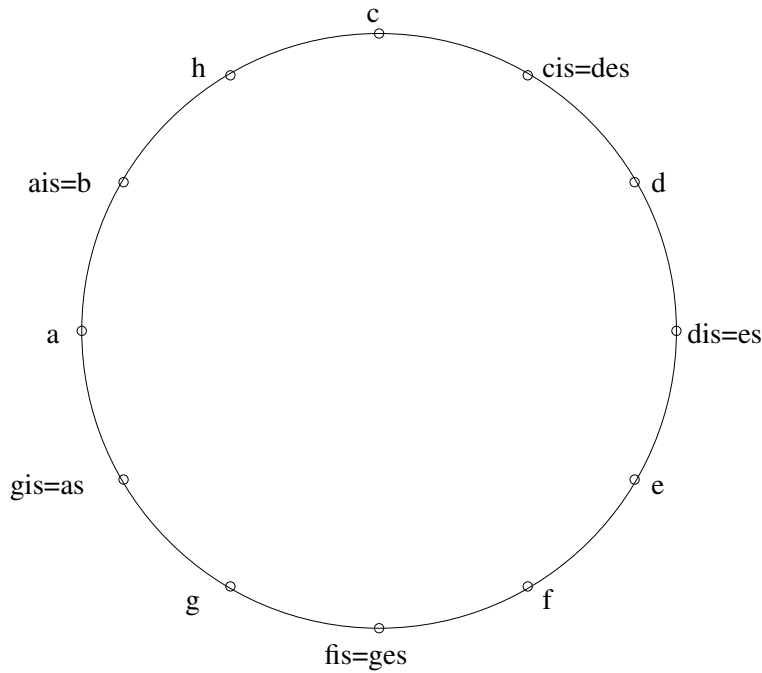
(siehe Winkler (2012), Abschnitt 4.2). Unser Empfinden für Tonhöhen gehorcht demnach dem Weber-Fechnerschen Gesetz, welches in unserem Kontext besagt: Der Erhöhung der Frequenz eines Tones mit einem bestimmten multiplikativen Faktor entspricht in unserer Wahrnehmung eine Erhöhung des Tones um ein diesem Faktor zugeordnetes Intervall.

Offen ist noch die Frage, ob sich für die Basis  $b$  eine bestimmte Zahl anbietet, die dann auch der Maßeinheit der (subjektiven) Tonhöhe  $t$  entspräche. Wunderbarerweise gibt unser subjektives Erleben auch da einen eindeutigen und mathematisch konkretisierbaren Anhaltspunkt.

### 3.3. Die Oktave

Unter allen Transponierten einer gegebenen Melodie zeichnen sich einige dadurch aus, dass wir sie nicht nur als dieselbe Melodie empfinden, sondern dass in einem, nur über die Hörerfahrung nachvollziehbaren Sinn, sogar die einzelnen Töne ihren Charakter bewahren. Es zeigt sich, dass dies erstmals exakt bei Verdopplung der Frequenz der Fall ist, musikalisch gesprochen: bei der Oktave.<sup>2</sup> Aus diesem Grunde tragen alle Töne, die durch ein- oder mehrmalige Oktavierung auseinander hervorgehen, denselben Namen, z.B. C-c-c'-c'' etc. Als visuelle Veranschaulichung ergibt sich ein Kreis, auf dem die zwölf (Halb-) Töne des abendländischen Systems (und zwar der sogenannten chromatischen Skala), im Uhrzeigersinn aufsteigend, aufgetragen werden können:

<sup>2</sup> Die höchst faszinierende Frage, warum dieses hörpsychologische Phänomen von der Evolution bevorzugt wurde, muss hier leider offen bleiben.

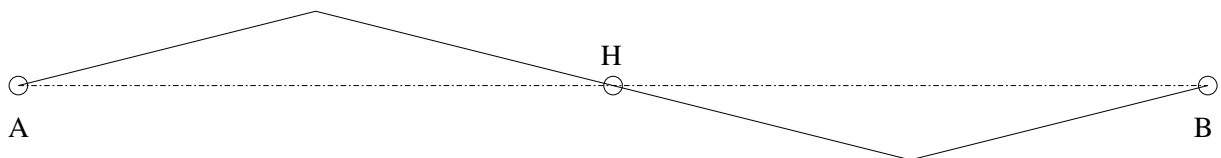


Wir wollen hier vom *Tonkreis* sprechen, nicht zu verwechseln mit dem *Quintenzirkel*, wo benachbarte Punkte eine Quint und nicht nur einen Halbtonschritt auseinander liegen. Wenn hohe Genauigkeit erforderlich ist, unterteilt man jeden Halbtonschritt auch noch in 100 Cent, so dass 1200 Cent eine ganze Oktave ausmachen. Die Genauigkeit, mit der wir zeitlich aufeinander folgende unterschiedliche Tonhöhen wahrnehmen können, variiert rund um eine Größenordnung von 10 Cent. Warum die Oktave gerade in 12 Halbtonschritte als kleinste Einheit unterteilt wird, werden wir noch verstehen lernen. Dem dafür grundlegenden Phänomen ist das nächste Kapitel gewidmet.

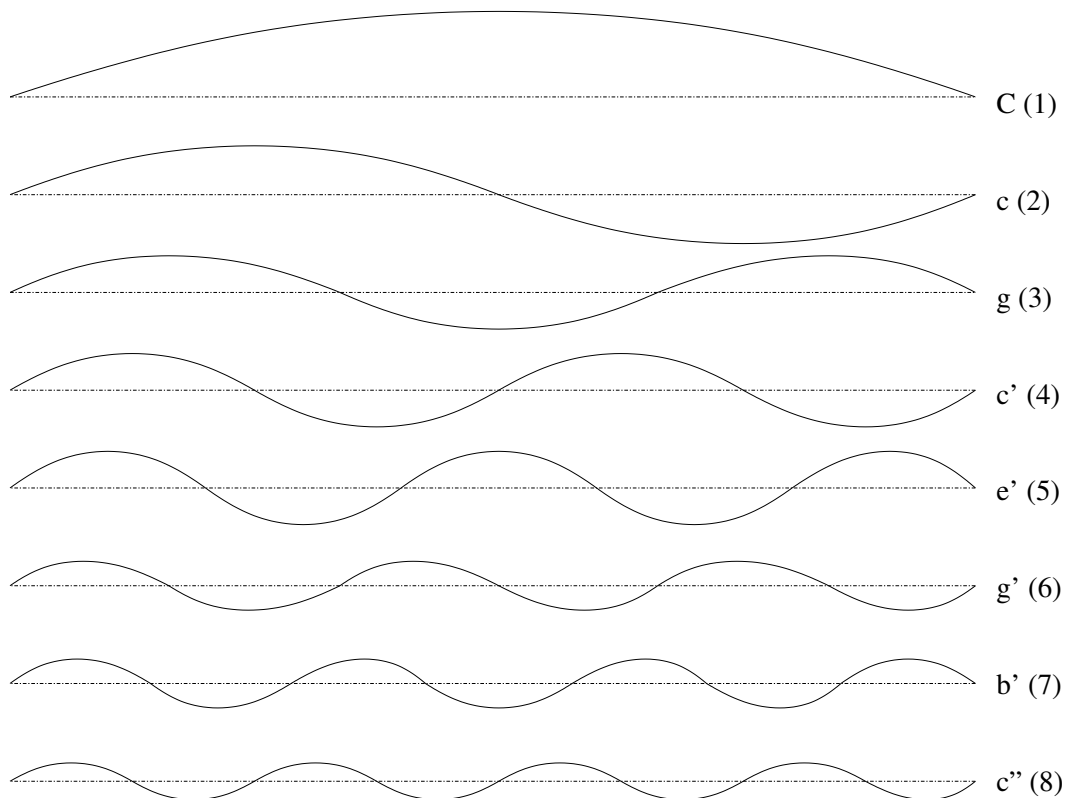
## 4. Obertöne – Teiltöne

### 4.1. Obertöne physikalisch

Anhand schwingender Saiten, wie sie bei Zupf-, Streich- und vielen Tasteninstrumenten den Ton erzeugen, lässt sich das Phänomen der Obertöne besonders leicht verstehen. Man stelle sich vor, eine schwingende Saite sei abgesehen von ihren Verankerungen in A und B auch an ihrem Halbierungspunkt H fixiert.



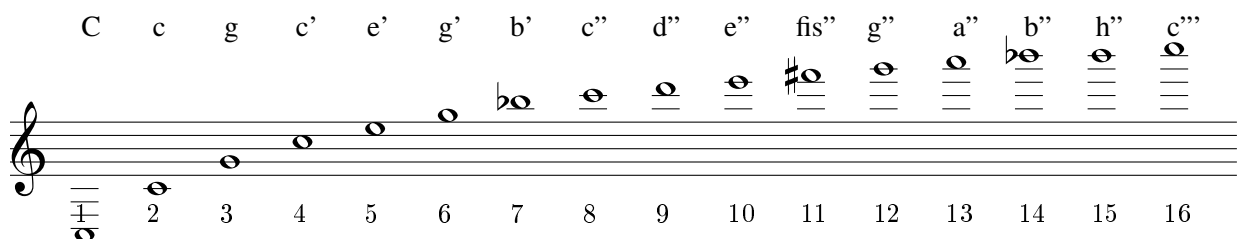
Die linke Hälfte der Saite werde durch Auslenkung nach oben zum Schwingen angeregt, die rechte Saite im selben Moment durch gleich große Auslenkung nach unten. Es liegen also zwei schwingende Saiten halber Länge vor, der Ton ist folglich um eine Oktave erhöht. Am Halbierungspunkt greift aus Symmetriegründen in jedem Moment nach links dieselbe Kraft an wie nach rechts, so dass sie einander aufheben. Die Konsequenz: Auch wenn man die Fixierung der Saite bei H löst, bleibt der Punkt fest, Schwingung und Tonhöhe ändern sich nicht. Die Saite kann also nicht nur in ihrer Grundfrequenz schwingen, sondern auch mit doppelter und, analog, mit dreifacher, vierfacher etc. Die zugehörigen Töne nennt man die Obertöne oder Teiltöne, im Falle des Grundtons C sind das:



Es hat sich eingebürgert, den Grundton (hier C) den ersten Teilton und die Oktave (hier c) als den ersten Oberton oder zweiten Teilton etc. zu bezeichnen. Die Nummerierung der Teiltöne wird sich als praktischer erweisen als die der Obertöne, weshalb wir sie bevorzugen.

#### 4.2. Teiltöne in Notenschrift

In Notenschrift wird ein weiterer mathematischer Zusammenhang sichtbar:

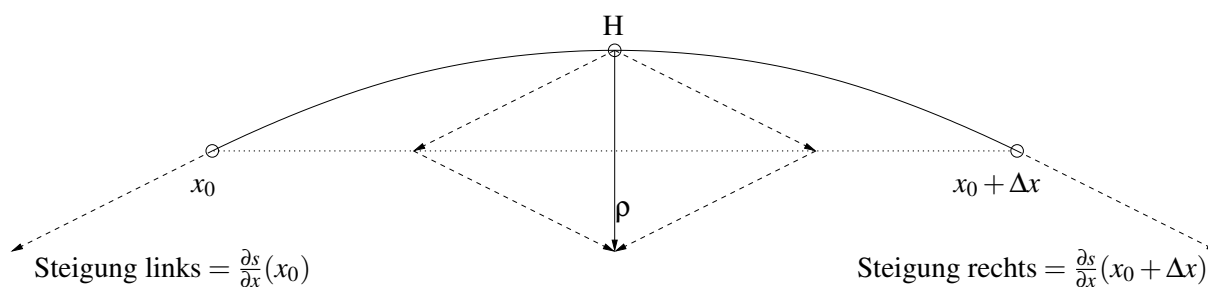


Durch die Notenköpfe lässt sich (wegen der Rundung auf Ganz- bzw. Halbtönschritte allerdings nur approximativ) eine Kurve denken, die wegen des Webner-Fechnerschen Gesetzes als Graph der Logarithmusfunktion deutbar ist; und zwar, wenn wir auf der senkrechten Achse die Oktave als Einheit wählen, zur Basis 2. Allerdings erweist sich die Approximation abgesehen von den Zweierpotenzen (iterierten Oktaven) nicht als exakt, in manchen Fällen, den sogenannten ekmelischen Tönen, sogar als nicht integrierbar ins abendländische Tonsystem. Von den eingezeichneten Teiltönen ekmelisch sind jene mit den Nummern 7 und 14 (tiefer als  $b'$  bzw.  $b''$ ), 11 (tiefer als  $f''$ ) und 13 (tiefer als  $a''$ ). Was unterscheidet diese Zahlen bzw. Töne von den anderen? Auf den ersten Blick mag es nicht auffallen, wir werden als entscheidendes Merkmal aber erkennen: Die Nummern der ekmelischen Teiltöne haben Primteiler verschieden von 2, 3 und 5. Bevor wir uns klar machen, warum es gerade darauf ankommt, wollen wir aber die schwingende Saite noch etwas genauer analysieren.

#### 4.3. Physikalische Analyse der schwingenden Saite

Offenbar brauchen wir für eine mathematische Beschreibung wenigstens zwei reellwertige Variablen. Wir wählen  $t$  für die Zeit und  $x$  zur Markierung entlang der ruhenden Saite als Koordinatenachse. Dann

interessiert die Auslenkung  $s(x, t)$  der Saite an der Stelle  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ . Wir wollen die Kraft bestimmen, die auf einen kleinen Abschnitt (durchgängige Kurve) der Saite der Länge  $\Delta x$  insgesamt wirkt. Das lässt sich aus



ablesen. Die Schräglage (Steigung) der Saite an der Stelle  $x_0$  ist gegeben durch  $\frac{\partial s}{\partial x}(x_0)$  (Ableitung von  $s$  nach  $x$  bei  $x_0$ ), an der Stelle  $x_0 + \Delta x$  durch  $\frac{\partial s}{\partial x}(x_0 + \Delta x)$ .

Bei geeigneter Wahl der Einheiten, hinreichend kleinem  $\Delta x$  und zweimal stetig differenzierbarem  $s$  gilt:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}(x_0) \approx \frac{\rho}{\Delta x} \approx \frac{\Delta \frac{\partial s}{\partial x}}{\Delta x} \approx \frac{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(x_0) \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(x_0)$$

Die vier, teilweise nur approximativen Identitäten in dieser Kette verdienen kurze Erläuterungen.

Die erste Approximation bringt zum Ausdruck, dass die Beschleunigung (zweite Ableitung nach der Zeit) direkt proportional ist zur wirkenden Kraft  $\rho$  und indirekt proportional zur Masse des beschleunigten Körpers und somit zur Länge  $\Delta x$  des kleinen Saitenabschnitts. Die zweite Approximation beruht darauf, dass die Kraft  $\rho$  die Resultierende des Kräfteparallelogramms ist, welches aus den an den Stellen  $x_0$  und  $x_0 + \Delta x$  angreifenden Zugkräften (nach Parallelverschiebung in den Punkt H) gebildet wird. Offenbar ist  $\rho$  annähernd proportional zur Veränderung  $\Delta \frac{\partial s}{\partial x}$  der Neigung der Saite im betrachteten Abschnitt von  $x_0$  bis  $x_0 + \Delta x$ . In der dritten Approximation wird diese Änderung der Neigung (Änderung der ersten Ableitung nach  $x$ ) approximiert durch die zweite Ableitung nach  $x$ , multipliziert mit der Länge  $\Delta x$ . Die vierte Beziehung schließlich ergibt sich bei Kürzung von  $\Delta x$  im Bruch links.

Weil die beschriebenen Approximationen alle beliebig gut werden, wenn nur  $\Delta x$  klein genug ist, gelangen wir zur:

#### 4.4. Differentialgleichung der schwingenden Saite

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

Offenbar wird diese Differentialgleichung beispielsweise von der Funktion  $s_1$  mit

$$s_1(x, t) = \sin(x) \sin(t)$$

gelöst, die noch dazu die Randbedingung  $s_1(0, t) = s_1(\pi, t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt. Diese bringt zum Ausdruck, dass die Saite an ihren Endpunkten (links  $x = 0$ , rechts  $x = \pi$  bei geeigneten Einheiten) fixiert ist. Außerdem gilt  $s_1(x, 0) = 0$  (zum zeitlichen Nullpunkt befindet sich die Saite in der Position der Ruhelage). Das gleiche gilt aber auch für die Funktionen  $s_n$  mit  $s_n(x, t) = c_n \sin(nx) \sin(nt)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und beliebige Konstanten  $c_n \in \mathbb{R}$ , die auch Fourierkoeffizienten heißen. Konvergieren die  $c_n$  für  $n \rightarrow \infty$  hinreichend schnell gegen 0, so ist nach Sätzen über das gliedweise Differenzieren von Reihen mit gleichmäßig konvergenten Ableitungen auch  $s$  mit

$$s(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \sin(nx) \sin(nt)$$

eine Lösung unserer Differentialgleichung. In unserem Zusammenhang bedeutet das: Eine idealisierte (natürlich keine reale) schwingende Saite kann Töne erzeugen, die sich aus sämtlichen, unendlich vielen Teiltönen des Grundtones zusammensetzen, sofern nur der Anteil hoher Teiltöne hinreichend schnell klein wird.



## 4.5. Mathematische Abgründe und musikalische Implikationen

Dass wir eine unendliche Menge von Lösungen der Differentialgleichung für die schwingende Saite gefunden haben, bedeutet natürlich nicht a priori, dass es keine weiteren gibt. Dem systematisch nachzugehen, würde die Möglichkeiten des Mathematikunterrichts in der Schule allerdings weit übersteigen. Es ist aber möglich und kann auch sehr interessant sein, an dieser Stelle manch Grundsätzliches anzusprechen. Die in diesem Abschnitt skizzierten Anknüpfungspunkte sind nur als Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer gedacht, keineswegs als verbindlicher Unterrichtsstoff.

Man könnte etwa den klassischen Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf für gewisse gewöhnliche Differentialgleichungen thematisieren. Eine Anbindung desselben an die Schulmathematik wurde in Winkler (2013) versucht, in der Langversion auch mit ausführlichen Beweisen.

Wie fast immer in der angewandten Mathematik, lohnt es auch im Fall der schwingenden Saite zu fragen, inwiefern Modellannahmen die reale Situation vereinfachen. Etwa sind wir im Modell von einer unendlich dünnen Saite ohne innere Materialeigenschaften ausgegangen, was natürlich nicht der Realität entspricht, und viele andere Faktoren fallen jedem ein, der nur kurz darüber nachdenkt. Dennoch erweist sich das Modell für die Praxis als sehr brauchbar.

Mathematische Anknüpfungspunkte in eine andere Richtung sind Fourierreihen. Ihre Theorie wird für die Schule sicher zu schwierig sein. Erst recht gilt das für ihre strukturmathematische Vertiefung, die man aus den nunmehr offensichtlichen Gründen *Harmonische Analysis* nennt. Georg Cantor entwickelte seine Mengenlehre ursprünglich deshalb, weil er den Konvergenzbereich von Fourierreihen untersuchte und erkannte, wie kompliziert dieser sein kann. Auch uns ist ja schon aufgefallen, dass die Konvergenz davon abhängt, wie schnell die Fourierkoeffizienten  $c_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergieren. In Grenzfällen kann es deshalb vorkommen, dass eine Fourierreihe für manche Werte der Variablen konvergiert, für andere aber nicht. Anhand dieser historischen Zusammenhänge ließe sich im Mathematikunterricht thematisieren, dass Mengenlehre nicht mit dem sinnarmen Zeichnen von Knödeln begann, wie sie manchmal in den Schulunterricht gebracht wurde, sondern aufgrund dringlicher mathematischer Anliegen.

Doch zurück zum musikalischen Klang: Die relative Größe der  $c_n$  zueinander spielt eine wichtige Rolle bei der Klangfarbe, einer wichtigen musikalischen Qualität, der wir bisher noch keine Aufmerksamkeit geschenkt haben. Auch wenn es nicht lohnt, ins sehr komplizierte Detail zu gehen, wäre dieser Zusammenhang interessant für den Unterricht. Die Klangfarbe wird allerdings nicht allein durch die  $c_n$  bei einem lange ausgehaltenen Ton bestimmt. Der Unterschied zwischen verschiedenen Instrumenten kann beim Einsetzen eines Tones besonders markant sein. Das wird sofort plausibel, wenn man an die Unterschiede im Klang einer Gitarrensaite denkt, je nachdem, ob man sie beim Halbierungspunkt zupft oder nahe ihrem Ende (dem sogenannten Steg). Im zweiten Fall werden besonders während der ersten Sekundenbruchteile des Erklingens (Einschwingphase) gewisse hohe Teiltöne im Vergleich zum schwachen Grundton relativ stark vertreten sein, was den helleren Klang bewirkt, allerdings bei geringerer Gesamtlautstärke. Reizvoll sind deshalb Experimente, wo Instrumente am Klang erkannt werden sollen und einmal ohne die Einschwingphase zu hören sind, danach zum Vergleich vom Beginn ihres Erklingens an.

## 5. Von der Physik zurück zu Musik und Mathematik

### 5.1. Konsonanz und Dissonanz

Ganz wesentlich für unser Erleben (nicht nur) von Musik ist die Polarität von Spannung und Entspannung, die in der Harmonie, d.h. beim Zusammenklang von zwei oder mehreren Tönen, oft durch den Kontrast von Dissonanz und Konsonanz vermittelt wird. In der Geschichte sind dazu viele Theorien unterschiedlicher Überzeugungskraft entwickelt worden. Sogar Euler definierte eine Kennzahl für den Konsonanzgrad. Als wahrscheinlich wichtigster Beitrag ist Helmholtz (1863) zu nennen.

Ausgehen kann man von einem Experiment auf einem Saiteninstrument mit kontinuierlich variabler Tonhöhe, wo man auf zwei Saiten denselben Ton (in mittlerer Lage, z.B. ein c mit etwa 264 Hertz)

spielt, auf einer der beiden aber die Tonhöhe glissandoartig, d.h. kontinuierlich erhöht, wenigstens bis zur Oktave. Dann treten der Reihe nach mehrere unterschiedliche Klangqualitäten auf:

1. Gleichklang: Wahrnehmung eines einzigen reinen Tones.
2. Schwebung: Bei einer Differenz von wenigen Hertz können wir die beiden Töne, wenn sie nacheinander erklingen, in ihrer Tonhöhe nicht unterscheiden. Erklingen sie aber gleichzeitig, nehmen wir den Klang als einen einzigen Ton wahr, allerdings wegen der Überlagerung der beiden geringfügig verschiedenen Grundschwingungen als an- und abschwellend. Die Anzahl solcher Zyklen pro Sekunde ist gleich der Differenz der beiden Frequenzen in Hertz. Die Frequenz des resultierenden Tones ist das arithmetische Mittel der beiden einzelnen Frequenzen. Das Phänomen des An- und Abschwellens eignet sich hervorragend zum präzisen Stimmen von Instrumenten.
3. Rauigkeit: Bei noch größerer Differenz der Tonhöhen gehen schließlich der Eindruck des reinen Tons und auch die Schwebungseffekte verloren. Erklingen die Töne hintereinander, so können wir je nach Feinheit des Gehörs erkennen, welcher der höhere ist, welcher der tiefere. Bei gleichzeitigem Erklingen hingegen entsteht eine unangenehme Rauigkeit des Klanges. Ist ein Instrument in diesem Umfang verstimmt, erkennen wir aber trotzdem noch Melodien, weil wir, wie man sagt, zurechthören, d.h. verstimzte Töne als die intendierten reinen interpretieren.
4. Dissonanz: Erst etwa beim Sechstel eines Halbtonschritts (HTS) – die Grenze hängt stark vom Kontext ab und ist sehr unscharf – scheidet das Zurechthören, und wir nehmen auch beim Zusammenklang zwei verschiedene Töne wahr, die eine scharfe Dissonanz bilden. Dieser Eindruck bleibt bis über eine große Sekund (Ganztonschritt = 2 HTS) hinaus bestehen.
5. Variierende Konsonanzen und Dissonanzen: Erstmals bei einer kleinen Terz (3 HTS) nehmen wir das entstehende Intervall als angenehmen Zusammenklang zweier verschiedener Töne (Konsonanz) wahr. Bei weiterer Vergrößerung des Intervalls variiert der Grad der Konsonanz. Am größten ist er bei Quart (5 HTS) und Quint (7 HTS), sehr dissonant ist dazwischen der Tritonus (6 HTS). Das letzte konsonante Intervall in diesem Bereich ist die große Sext (9 HTS = Oktav minus kleine Terz).
6. Annäherung an die Oktave: Bei weiterer Vergrößerung des Intervalls hin zur Oktave wiederholen sich spiegelbildlich die anfangs beobachteten Phasen.

Die übliche Erklärung, die sich an Pythagoräischem Gedankengut anlehnt und im Wesentlichen auch Eulers Ansatz entspricht, lautet: Als konsonant werden jene Intervalle empfunden, wo die Verhältnisse der Frequenzen als Brüche mit kleinem Zähler und Nenner dargestellt werden können. Bei größt möglicher Konsonanz beginnend erhält man innerhalb einer Oktave als gängige Intervalle der Reihe nach: Prim (1:1), Oktav (2:1), Quint (3:2), Quart (4:3), große Sext (5:3), große Terz (5:4), kleine Terz (6:5), kleine Sext (8:5) und dann die Dissonanzen große Sekund (9:8) und kleine Septim (16:9). Es fällt auf, dass unter diesen gängigen Intervallen die Zahl 7 (ekmelischer Ton!) weder im Zähler noch im Nenner der Brüche vorkommt. Wir werden darauf noch zurückkommen. Außerdem hätte die große Septim (15:8), obwohl schärfere Dissonanz, schon vor der kleinen kommen müssen. Das deutet darauf hin, dass die Erklärung allein über die Brüche noch nicht perfekt ist.

Überzeugender scheint die Erklärung, wonach für unser Dissonanzempfinden nur die relativ kleinen, dissonanten Intervalle verantwortlich sind. Allerdings müssen auch die mitklingenden Obertöne bedacht werden, auch wenn unser Bewusstsein sie ausblendet. Sie generieren nämlich genauso Dissonanzen wie die Grundtöne, allerdings nur entsprechend ihrer Stärke. Folglich hängt unser Empfinden für Konsonanz bzw. Dissonanz vom Obertonspektrum, also auch vom Instrument und seiner Klangfarbe ab (darüber hinaus von den stark kulturell geprägten Hörgewohnheiten). Versuche mit synthetisch erzeugten reinen Sinusschwingungen – wo also, anders als bei der menschlichen Stimme oder bei traditionellen Instrumenten, neben dem Grundton gar keine Obertöne mitklingen – zeigen, dass wir per se nur kleine Intervalle als dissonant empfinden, nicht hingegen beispielsweise den besonders übel beleumundeten Tritonus (Teufelsintervall, sechs Halbtonschritte, 45:32). Seinen üblen Ruf verdankt er dem Umstand, dass die

normalerweise noch starken Teiltöne Nummer 2 des oberen und Nummer 3 des unteren Tones gemeinsam eine scharfe Dissonanz bilden.

## 5.2. Tonsysteme

Wenn es um ein allgemeines Tonsystem, d.h. um eine praktikable Menge von auf möglichst allen Instrumenten verfügbaren Tönen geht, lassen sich, großteils aufgrund unserer bisherigen Überlegungen, unterschiedliche Anliegen ableiten. Insbesondere für die abendländische Musik haben sich die folgenden als besonders wichtig erwiesen:

- Sparsamkeit bei den Tönen: Anders als die Streichinstrumente, auf denen beliebig feine Unterschiede von Tonhöhen erzeugt werden können, müssen viele andere Instrumente, wie z.B. das Klavier, mit einer endlichen Anzahl von Tönen auskommen; je weniger Töne, desto günstiger für den Instrumentenbau.
- Oktavierbarkeit (wenigstens innerhalb des verfügbaren Tonumfangs)
- Einbeziehung wenigstens der ersten Obertöne
- Modulationsfreudigkeit (Transponierbarkeit)
- Reichhaltigkeit harmonischer Zusammenklänge (Mehrstimmigkeit)
- Existenz eines als zentrale Basis wirkenden Grundtons = Tonika

Wir wollen diese Bedingungen in die Sprache der Mathematik übersetzen. Einige davon führen zur:

## 5.3. Suche nach einer geeigneten zyklischen Gruppe

Um Oktavierbarkeit zu gewährleisten, betrachten wir den Tonbereich innerhalb einer Oktave und denken uns diesen zyklisch fortgesetzt, wie in 3.3. Anstelle der Menge  $\mathbb{R}$  nehmen wir als Modell für das System aller denkbaren Tonhöhen deshalb die Menge  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , die sich am besten als Kreis veranschaulichen lässt.  $\mathbb{T}$  ist sogar eine (abelsche) Gruppe, weil darin eine Addition (Rechnen modulo 1, d.h. mit den Nachkommaanteilen, z.B.  $0,8 + 0,7 = 1,5 \equiv 0,5$ ) möglich ist. Das kommt uns sehr gelegen, weil die Addition einer festen Zahl der Transposition um ein bestimmtes Intervall entspricht. Weil wir (Transponierbarkeit!) Intervalle unter- und übereinander schichten wollen, suchen wir also nach Untergruppen  $U$  von  $\mathbb{T}$ , die überdies möglichst klein, jedenfalls aber endlich sein sollen. Man überzeugt sich leicht davon, dass jede endliche Untergruppe von  $\mathbb{T}$  zyklisch ist und ein erzeugendes Element der Form  $\frac{1}{m}$  mit  $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$  hat. Für Tonsysteme zur Auswahl stehen also nur die Mengen

$$U_m = \left\{ \frac{k}{m} + \mathbb{Z} : k = 0, 1, \dots, m-1 \right\}$$

mit  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Im Abendland durchgesetzt hat sich  $m = 12$ . Warum?

Hier ist vor allem unser Anliegen wirksam, wenigstens die ersten paar Obertöne zu berücksichtigen, wobei wegen des Zurechthörens gewisse Ungenauigkeiten hingenommen werden dürfen. Für den Teilton Nummer  $n = \prod_p p^{e_p}$  (Primfaktorzerlegung) soll wegen des Webner-Fechnerschen Gesetzes (siehe 3.2) eine gute rationale Approximation mit kleinem Nenner für

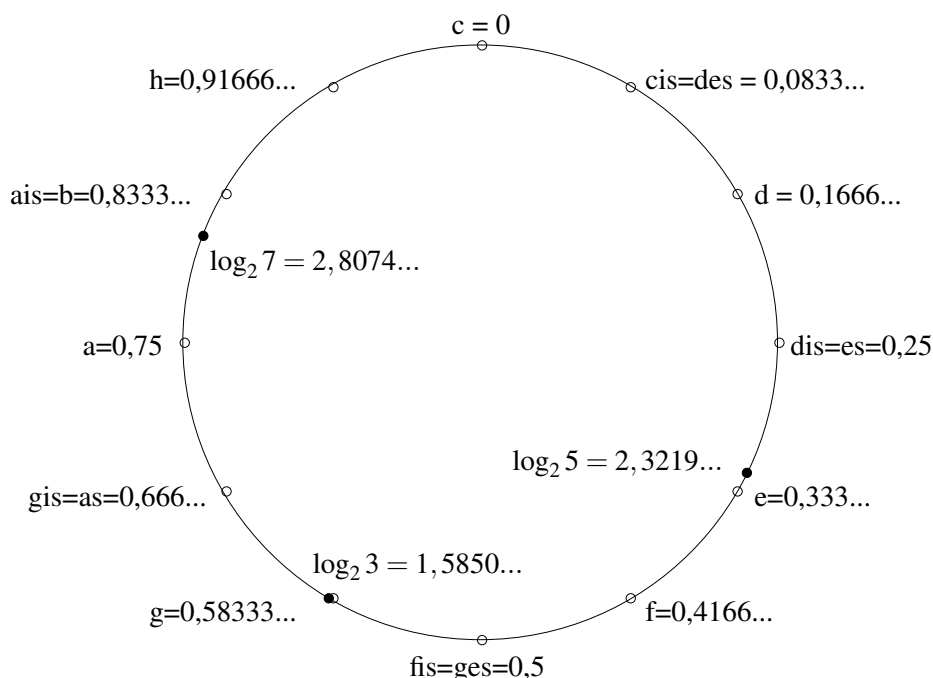
$$\log_2(n) = \log_2 \left( \prod_p p^{e_p} \right) = \sum_p e_p \log_2(p),$$

gefunden werden.<sup>3</sup> Aus der Summendarstellung mit den ganzzahligen Koeffizienten  $e_p$  lesen wir ab, dass es zunächst auf die rationalen Approximationen von  $\log_2(p)$  für Primzahlen  $p$  ankommt. Sehen

<sup>3</sup> Wir sind damit beim Hauptanliegen der sogenannten *Diophantischen Approximation* angelangt. Dieses Teilgebiet der Zahlentheorie, in dem Kettenbrüche eine wichtige Rolle spielen, ist in seinen Grundideen durchaus für den Mathematikunterricht geeignet. Das im Einzelnen zu vertiefen führte hier aber zu weit.

wir uns das einmal für die ersten vier Primzahlen  $p = 2, 3, 5, 7$  an. Trivial ist die Situation für die sogar ganze Zahl  $\log_2(2) = 1 \equiv 0 \pmod{1}$ . Für  $\log_2(3) \approx 1,585 \equiv 0,585 \pmod{1}$  wäre  $\frac{8}{5} = 1,6$  eine eventuell akzeptable Approximation, viel besser aber ist  $\frac{7}{12} \approx 0,583$ ; und siehe da, auch  $\log_2(5) \approx 2,322 \equiv 0,322 \pmod{1}$  lässt sich mit Nenner 12 recht gut approximieren:  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0,333$ . Schwierigkeiten gibt es mit Nenner  $m = 12$  erst bei  $\log_2(7) \approx 2,807 \equiv 0,807 \pmod{1}$ , welches von seinen Nachbarn  $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$  und  $\frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0,833$  für ein Zurechthören zu weit entfernt ist. Besser wären die Approximationen  $\frac{4}{5} = 0,8$  oder  $\frac{21}{26} \approx 0,808$ .

Die abendländische Musik hat sich mit  $m = 12$  begnügt und auf den siebenten Teilton ebenso wie auf die meisten höheren verzichtet. Andernfalls hätte man die Oktave in  $m = 12 \cdot 5 = 60$  oder gar  $m = 156$  (kleinstes gemeinsames Vielfaches von 12 und 26) gleiche Tonschritte unterteilen müssen. Durchgesetzt hat sich also das sogenannte gleichschwebend temperierte Tonsystem, wo die Oktave in zwölf gleich große Intervalle, die sogenannten Halbtonschritte, jeder mit Frequenzverhältnis  $\sqrt[12]{2} \approx 1,059$ , unterteilt wird. Alle Intervalle werden durch ganzzahlige Vielfache von Halbtonschritten approximiert: Prim (0), kleine Sekund (1), große Sekund (2), kleine Terz (3), große Terz (4), Quart (5), Tritonus = übermäßige Quart = verminderte Quint (6), Quint (7), kleine Sext (8), große Sext (9), kleine Septim (10), große Septim (11), Oktave (12), kleine Non (13) usw. Die Situation kann am Tonkreis veranschaulicht werden:



#### 5.4. Unreine Intervalle und eindeutige Primfaktorzerlegung

Dass in der gleichschwebenden Stimmung die reine Quint (Frequenzverhältnis 3:2) nicht exakt getroffen wird, lässt sich auch elementar nachrechnen. Denn 12 temperierte Quinten, jeweils  $\frac{7}{12}$  einer Oktave, übereinandergelegt ergeben exakt 7 Oktaven, während  $(\frac{3}{2})^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}}$  (entspricht 12 reinen Quinten) keine ganze Zahl und somit verschieden von  $2^7$  ist.<sup>4</sup> Dieses Argument<sup>5</sup> kann man auch als Anwendung des Satzes von der eindeutigen Primfaktorzerlegung (EPFZ) interpretieren, weil verwendet wurde, dass eine Potenz von 3 nicht durch eine Potenz von 2 teilbar sein kann.

EPFZ bedeutet bekanntlich: Jede positive natürliche Zahl  $n$  ist ein (im Fall von  $n = 1$  leeres) Produkt von Primzahlen  $p$ , wobei (und das ist die eigentlich interessante Aussage) die Vielfachheit, mit der jedes  $p$  in

<sup>4</sup> Die Differenz heißt Pythagoräisches Komma.

<sup>5</sup> Natürlich könnte man auch direkt die äquivalente Ungleichheit  $3^{12} = 531441 \neq 524288 = 2^{19}$  feststellen. Dass diese beiden Zahlen immerhin relativ nahe beieinander liegen, ist der mathematische Grund für die Tragfähigkeit des Quintenzirkels, an dem sich übrigens gut das Rechnen modulo 12, insbesondere die Multiplikation mit 7 (Halbtonschritte einer Quint) illustrieren lässt.

diesem Produkt vorkommt, durch  $n$  eindeutig bestimmt ist.<sup>6</sup>

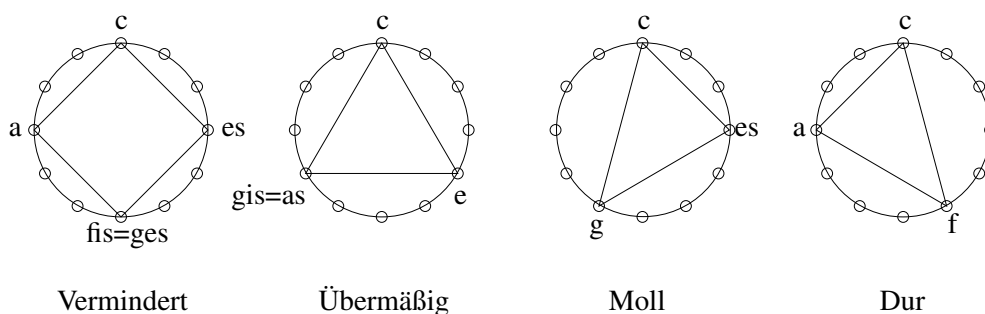
Wegen der Allgemeinheit dieses Satzes folgt, dass die Probleme unreiner Intervalle unvermeidbar sind, auch wenn man statt 12 beliebige andere Werte für  $m \in \mathbb{N}$  zuließe oder gar, gegen alle Hörpsychologie, statt mit der Oktave mit einem anderen Bezugsintervall arbeitete.

## 5.5. Konsonante Akkorde

In der abendländischen Musik spielt seit dem Mittelalter Mehrstimmigkeit eine besonders gewichtige Rolle. Dafür sind offensichtlich möglichst volle und dennoch konsonante Akkorde von Interesse. Wie bereits besprochen, enthalten Konsonanzen keine Sekunden (kleine oder auch große). Erlaubte Intervalle haben also die Größe von mindestens 3 Halbtonschritten, d.h. einer kleinen Terz. Ab 6 Halbtonschritten ist wiederum eine Zerlegung in kleinere konsonante Intervalle möglich. Weil sich bei der Oktave (12 Halbtonschritte) alles zyklisch wiederholt, suchen wir entsprechend Zerlegungen der Zahl 12 in Summanden 3, 4, 5, wobei hinsichtlich der Reihenfolge zyklische Vertauschungen den Klangcharakter bewahren, andere aber nicht. Entsprechend gibt es vier in diesem Sinne verschiedene Zerlegungen:

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4 = 3 + 4 + 5 = 5 + 4 + 3$$

Die erste davon (vier kleine Terzen übereinander) entspricht einem verminderten Septakkord. Ist z.B.  $c$  der Grundton, so erhalten wir  $c$ - $es$ - $fis$ - $a$ . Im Tonkreis (siehe Abbildung unten) entspricht diesem Akkord ein Quadrat (hier auf der Spitze stehend). Der zweite Akkord mit übereinander geschichteten großen Terzen (z.B.  $c$ - $e$ - $gis$ ) ist ein übermäßiger Dreiklang, im Tonkreis ein gleichseitiges Dreieck. Der dritte Akkord (kleine Terz, große Terz, Quart, z.B.  $c$ - $es$ - $g$ ) ist ein Molldreiklang (hier  $c$ -Moll), der vierte (Quart, große Terz, kleine Terz, hier  $c$ - $f$ - $a$ ) ein Durdreiklang (hier  $F$ -Dur).



Es fällt auf, dass gerade die symmetrischen Akkorde  $3 + 3 + 3 + 3$  und  $4 + 4 + 4$  musikalisch unbestimmt sind und von klassischen Komponisten am ehesten während Modulationen, also bei Übergängen von einer Tonart zur anderen eingesetzt werden. Im Vergleich dazu wirken Moll- und noch mehr Durdreiklang stabiler und können auch als Schlussakkorde fungieren. Das entspricht der Tatsache, dass in einem tonalen Musikstück die einzelnen Töne alles andere als gleichwertig sind, sondern dass vor allem der Tonika besonderes Gewicht zukommt. Lässt sich das noch kniziser erklären?

<sup>6</sup> Weil die EPFZ in der Schule üblicherweise zwar vorkommt, jedoch kaum explizit gemacht, geschweige denn bewiesen wird, sei hier zum klassischen Beweis über den euklidischen Algorithmus (wie z.B. in Winkler (2007) dargestellt) eine sehr kurze, gleichfalls schultaugliche, in der Lehrbuchliteratur aber weniger häufig zu findende Alternative angeboten:

Wäre die Eindeutigkeit verletzt, so gäbe es ein kleinstes Gegenbeispiel  $N$  mit zwei verschiedenen Zerlegungen, also

$$N = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$$

mit Primzahlen  $p_i$  und  $q_j$ . Wäre  $p_i = q_j$  für gewisse  $i, j$ , so könnte man die Gleichung durch diesen gemeinsamen Faktor kürzen und bekäme ein kleineres Gegenbeispiel als  $N$ . Also gilt  $p_i \neq q_j$  für alle  $i, j$ . Wir dürfen  $p_1 < q_1$  annehmen und betrachten

$$M := (q_1 - p_1) q_2 \dots q_s = N - p_1 q_2 q_3 \dots q_s = p_1 M' < N.$$

mit  $M' = p_2 p_3 \dots p_r - q_2 q_3 \dots q_s$ . Wir zerlegen in den Produkten  $(q_1 - p_1) q_2 \dots q_s$  und  $p_1 M'$  die noch zerlegbaren Faktoren weiter in Primfaktoren und erhalten in beiden Fällen Zerlegungen von  $M < N$ . In der zweiten kommt der Primfaktor  $p_1$  vor, in der ersten jedoch nicht (denn wäre  $p_1$  ein Teiler von  $q_1 - p_1$ , so auch von  $q_1$ , was unmöglich ist). Das widerspricht der Minimalität des Gegenbeispiels  $N$  und beweist somit die Eindeutigkeit der EPFZ.

## 5.6. Das Dur-Moll-System

Der Durdreiklang hat noch eine weitere wichtige Eigenschaft: Er besteht gerade aus den ersten Obertönen. Über C wären das C-c-g-c'-e'-g', nach Oktavierung also genau c-e-g. Unser Ohr ist gewohnt, als Höhe eines einzelnen Tones, auch wenn er Obertöne hat, nur den Grundton wahrzunehmen. Deshalb ist Musik in Dur besonders stark auf die Tonika bezogen.

Allerdings sind Obertöne rein, während in der gleichschwebenden Stimmung nur Approximationen der Quint und, noch ungenauer, der Terz vorliegen. Die große Durterz (z.B. c-e) ist also nur eine Annäherung an den Teilton Nummer 5. Die kleine Mollterz (z.B. c-es) ist eine andere, deutlich schlechtere Approximation. Diese stärkere Abweichung von der reinen Terz bietet sich als Erklärung für den in gewissem Sinne trüberen Klang von Moll im Vergleich mit Dur an.

Die sehr gute Approximation der Quint (3:2), die ja vom noch starken Teilton Nr. 3 kommt, legt deren große Bedeutung in der Musik nahe. Und tatsächlich: Die Quint entspricht der fünften Stufe sowohl von Dur- als auch von Molltonleiter. Wegen ihrer bestimmenden Rolle heißt die fünfte Stufe bekanntlich auch Dominante. Aus Symmetriegründen gilt Ähnliches für die Quart (4:3), die vierte Stufe, genannt Subdominante.

Doch wie kommt es zur siebenstufigen, sogenannten diatonischen Tonleiter? Für Dur lautet die übliche, sehr einleuchtende Erklärung: Errichten wir über Tonika, Dominante und Subdominante jeweils einen Durdreiklang (von c ausgehend hieße das c-e-g, g-h-d' und f-a-c') und oktavierem wir alle Töne in die Oktave von c bis c', erhalten wir die Durtonleiter c-d-e-f-g-a-h-c'. Für die Molltonleiter ist das nicht so eindeutig. In der Tat unterscheidet man auch natürliches (c-Moll: c-d-es-f-g-as-b-c'), harmonisches (Erhöhung der siebenten Stufe, d.h. b wird zu h) und melodisches (zusätzlich Erhöhung der sechsten Stufe, d.h. as wird zu a) Moll. Dabei geht es um sogenannte Leittoneffekte, die bei auf- und absteigenden Melodielinien verschiedene Versetzungen brauchen. Die Polarität stabil-labil beschreibt den Charakter der Tongeschlechter Dur (von lateinisch *durus* = hart) und Moll (von lateinisch *mollis* = weich) deshalb möglicherweise besser als das populäre, aber etwas klischeehafte Begriffspaar fröhlich-traurig.

Wenn mit Moll schon ein etwas unscharfes Tongeschlecht etabliert ist, warum versucht man es nicht noch mit weiteren? Tatsächlich ist die Fokussierung auf Dur und Moll eine neuzeitliche Entwicklung. Die sogenannten Kirchentonarten sind andere siebenstufige Skalen mit jeweils charakteristischen Abfolgen von Ganz- und Halbtonschritten. Es ist möglich, sie mit ausschließlich weißen Klaviertasten (c-Dur-Tonleiter) zu spielen, nur muss jeweils ein anderer Grundton gewählt werden. Je nach Lage der dritten Stufe kann man sie in durähnliche (jonisch=Dur auf dem Grundton c, lydisch auf f, mixolydisch auf g) und mollähnliche (dorisch auf d, phrygisch auf e, aeolisch=Moll auf a) einteilen.<sup>7</sup>

## 6. Schlussbemerkungen

In unseren Überlegungen über das Wechselspiel von Mathematik, Physik, Hörpsychologie und Musik sind wir mit einer gewissen Schlüssigkeit zum abendländischen Tonsystem, insbesondere zur Dur-Tonleiter geführt worden. Trotzdem sollten wir uns vor Augen führen, dass unsere Musikgeschichte auch andere Wege hätte nehmen können. Die zahlreichen, sehr unterschiedlichen Musikkulturen, die in den verschiedenen menschlichen Zivilisationen entstanden sind, beweisen die Vielzahl der Möglichkeiten. Wer über die physikalischen und physiologischen Hintergründe mehr wissen möchte, sei z.B. auf Spitzer (2002) verwiesen. Weiters empfehlenswert sind Wright (2009) als Ergänzung zum vorliegenden Text auf recht elementarem Niveau und Fauvel et al. (2003), wo mehrere Autoren ein breiteres thematisches Spektrum abdecken.

Immerhin lässt sich ein musikgeschichtliches Phänomen im Lichte unserer Erkenntnisse gut erklären: die Hinwendung von Dur zu Moll beim Übergang von Klassik zu Romantik. Vergleicht man im Werk

<sup>7</sup> Ein Sonderrolle spielt das Lokrische, das mit weißen Tasten auf dem Grundton h gespielt wird. Der darauf aufgebaute Dreiklang h-d-f ist ein verminderter. Die fünfte Stufe entspricht also nicht dem Teilton Nr.3. Der Tonikabezug wird dadurch so stark gestört, dass dieses Tongeschlecht nur von theoretischem Interesse ist.

großer Komponisten die Häufigkeit der beiden Tongeschlechter, so zeigt sich: Unter Haydns so zahlreichen Symphonien, Streichquartetten und Klaviersonaten stehen kaum mehr als 10% in Moll, ähnlich bei Mozart. Bei Beethoven steigt der Anteil auf etwa 20%, bei Schubert noch etwas höher (extrem ist die *Winterreise*, wo zwei Drittel der Lieder in Moll stehen). Diese Entwicklung setzt sich bei späteren Komponisten fort, wo häufig Moll gegenüber Dur überwiegt. Zum Beispiel stehen bei Tschaikowsky fünf von sechs Symphonien in Moll. Auf der Hand liegt die Deutung, dass die Klassik Klarheit und Eindeutigkeit, also Dur, bevorzugte, während dem romantischen Lebensgefühl Ambivalenz und Instabilität, wie sie in Moll zum Ausdruck kommen, näher standen.

Zum Abschluss ist noch eine Bemerkung zum Titel dieses Artikels am Platz. Die Leserin und der Leser werden wahrscheinlich fragen, warum es dort, anders als bei Nietzsche (siehe Nietzsche (1872)), *Bedingungen* und nicht *Geist* der Musik heißt. Der Grund: Wir haben uns hier nur mit Beschreibungen der naturgegebenen Bedingungen, unter denen Musik stattfindet, und ihren mathematischen Hintergründen beschäftigt. Warum Musik als kulturelles Phänomen so mächtig ist, warum und wie sie Geistiges zu transportieren imstande ist, das ist bestenfalls ganz am Ende, im Zusammenhang mit den Tongeschlechtern Dur und Moll, und auch da nur sehr oberflächlich angeklungen. Dennoch fasziniert die komplizierte Frage, ob wir über die Mathematik nicht nur aus den Bedingungen, sondern auch aus dem Geiste der Musik Interessantes lernen können. Gedanken, die sich aus höchster sowohl mathematischer wie auch musikalischer Professionalität speisen, finden sich in dem äußerst lesenswerten Artikel Krattenthaler (2013). In Winkler (2009) werden weitere Aspekte der Beziehung zwischen Kunst und Mathematik am Beispiel eines Gemäldes des zeitgenössischen österreichischen Malers Oskar Putz und der Opern von Mozart und da Ponte (letztere allerdings primär unter psychologischen und dramaturgischen statt unter musikalischen Gesichtspunkten) behandelt.

## Literatur

- John Fauvel, Raymond Flood und Robin Wilson (Hg.). *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*. Oxford University Press. Oxford (2003).
- Hermann von Helmholtz. *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. Vieweg. Braunschweig (1863). Nachdruck: Minerva-Verlag. Frankfurt am Main (1981).
- Christian Krattenthaler. *Mathematik UND Musik? Persönliche Ansichten zu einer schwierigen Beziehung*. Internat. Math. Nachrichten 224 (2013), 29-60.
- Friedrich Nietzsche. *Die Geburt der Tragödie aus dem Geiste der Musik*. Verlag von E. W. Fritsch. Leipzig (1872). Zahlreiche Nachdrucke, insbesondere in Nietzsche-Gesamtausgaben.
- Manfred Spitzer. *Musik im Kopf*. Schattauer GmbH, Hölderlinstraße 3, D-70174 Stuttgart (2002).
- Reinhard Winkler. *Putz, Mozart, Galois – Symmetrie und Asymmetrie als Vermittlerinnen zwischen Form und Inhalt*. Im Katalog der Ausstellung *Oskar Putz – Bilder und Farbkonzepte*, 15.-25.1.2009, Künstlerhaus Wien. Hg: Christine Janicek. Gezeiten Verlag & Kommunikation Wien (2009), 41-68.<sup>8</sup>
- Reinhard Winkler. *Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht*. DH<sup>9</sup> 39 (2007), 155-165.
- Reinhard Winkler. *Im Anfang war die Exponentialfunktion*. DH<sup>9</sup> 44 (2012), 98-109.
- Reinhard Winkler. *Dynamische Systeme als Chance für den Schulunterricht* DH<sup>9</sup> 46 (2013), 108-122 (Kurzversion). Eine Langversion ist online auch unter [www.oemg.ac.at/DK/](http://www.oemg.ac.at/DK/) verfügbar.
- David Wright. *Mathematics and Music*. AMS American Mathematical Society. Providence, Rhodes Island (2009).

<sup>8</sup> Wie die anderen erwähnten Artikel des Autors online verfügbar unter <http://www.dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/>

<sup>9</sup> Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) – ehemals Didaktikhefte der ÖMG, online unter [www.oemg.ac.at/DK/](http://www.oemg.ac.at/DK/)